

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学 号: 20051301630

UDC _____

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

四角链与六角链关于最大特征根
的极值问题

Some Extremal Problems about the Largest Eigenvalue
of Polyominoes and Hexagonal Chains

郭 汉 英

指导教师姓名: 张莲珠 教授

专 业 名 称: 应用数学

论文提交日期: 2008 年 5 月

论文答辩日期: 2008 年 月

学位授予日期: 2008 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2008 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中已明确的方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保留的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

- 1、 保密 (), 在 年解密后适用本授权书。
- 2、 不保密 ()

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名: _____ 日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

导师签名: _____ 日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

摘 要

本文主要研究四角链与六角链关于最大特征根的极值问题。

四角链是一个四角系统，满足每个内部面是一个单位正方形且每个顶点至多属于三个正方形。 Ψ_n 表示所有 n 个正方形组成的四角链的集合，其中的线性四角链记为 L'_n 。六角链是一个六角系统，满足每个内部面是一个单位正六边形、每个顶点至多属于两个六边形且每一个六边形至多可与两个六边形相邻。 Γ_n 表示所有 n 个六边形组成的六角链的集合，其中的线性六角链与螺旋六角链分别记为 L_n 和 H_n 。图 G 的最大特征根是它的邻接矩阵的特征多项式的最大特征根，记为 $x_1(G)$ 。

全文分四章。第一章介绍所研究问题的背景及相关的研究结果。第二章介绍相关的术语及重要的已知结论。第三章证明对于 $\forall n \geq 1$ 和 $\forall B_n \in \Psi_n$ ，如 $B_n \neq L'_n$ ，

有 $x_1(B_n) > x_1(L'_n)$ 。第四章在已知最大特征根最大与最小的极值六角链的基础上给

出最大特征根次大与次小的极值六角链的范围：定义 $D_n \in \Gamma_n - \{H_n\}$ 和

$B_n \in \Gamma_n - \{H_n, D_n\}$ ，若对 $\forall n \geq 4$ ，有 $x_1(B_n) < x_1(D_n)$ ，则 $D_n \in \Phi_n$ ；定义 $D_n \in \Gamma_n - \{L_n\}$

和 $B_n \in \Gamma_n - \{L_n, D_n\}$ ，若对 $\forall n \geq 4$ ，有 $x_1(B_n) > x_1(D_n)$ ，则 $D_n \in \Omega_n$ 。这里

$\Phi_n = \{M_n = \beta k_2 \dots k_{n-1} \in \Gamma_n \mid \exists i(2 \leq i < n-1), \text{ s.t. } \forall j \leq i, k_j = \alpha \text{ 且 } \forall l > i, k_l = \gamma\}$

$\Omega_n = \{M_n = \beta k_2 \dots k_{n-1} \in \Gamma_n \mid \text{有且仅有 } i(2 \leq i \leq n-1), \text{ s.t. } k_i = \alpha(\text{或 } \gamma) \text{ 且 } \forall j \neq i, k_j = \beta\}$

其中 k_i 指将第 $i+1$ 个六边形粘贴到 $D_i = \beta k_2 \dots k_{i-1}$ 的方法，按三种不同的粘贴位置，

从上到下依次记 k_i 为 α 、 β 和 γ 。

关键词： 四角链；六角链；最大特征根

Abstract

Extremal polyomino chains and hexagonal chains concerning largest eigenvalue are studied in this thesis.

A polyomino chain is a kind of polyomino systems, in which inner surfaces are regular squares of unit edge length and each vertex belongs to three squares at most. Denoted by Ψ_n the set of the polyomino chain with n squares and L'_n the linear chain in Ψ_n .

A hexagonal chain is a kind of hexagonal system, in which inner surfaces are regular hexagons of unit edge length, each vertex belongs to two hexagons at most and each hexagon is adjacent to two hexagons at most. Denoted by Γ_n the set of the hexagonal chain with n hexagons, L_n the linear chain and H_n the helicene chain in Γ_n . The largest eigenvalue of G is just the largest eigenvalue of the characteristic polynomial of G and denoted by $x_1(G)$.

There are four chapters. Related backgrounds and results are discussed in the first chapter. Some related terms and important results are introduced in the second chapter; A conclusion is verified in the third chapter that for $\forall n \geq 1$ and $\forall B_n \in \Psi_n$, if $B_n \neq L'_n$, then $x_1(B_n) > x_1(L'_n)$. The scope of the chain with second maximal (or minimum) largest eigenvalue is given in the fourth chapter: denoted by $D_n \in \Gamma_n - \{H_n\}$ and $B_n \in \Gamma_n - \{H_n, D_n\}$, if $x_1(B_n) < x_1(D_n)$ for $\forall n \geq 4$, then $D_n \in \Phi_n$; denoted by $D_n \in \Gamma_n - \{L_n\}$ and $B_n \in \Gamma_n - \{L_n, D_n\}$, if $x_1(B_n) > x_1(D_n)$ for $\forall n \geq 4$, then $D_n \in \Omega_n$. where

$$\Phi_n = \{M_n = \beta k_2 \dots k_{n-1} \in \Gamma_n \mid \exists i(2 \leq i < n-1), \text{ s.t. } \forall j \leq i, k_j = \alpha \text{ and } \forall l > i, k_l = \gamma\}$$

$$\Omega_n = \{M_n = \beta k_2 \dots k_{n-1} \in \Gamma_n \mid \text{only has a } i(2 \leq i \leq n-1), \text{ s.t. } k_i = \alpha(\text{or } \gamma) \text{ and } \forall j \neq i, k_j = \beta\}$$

and k_i is the way to attach the $(i+1)$ th hexagon to $D_i = \beta k_2 \dots k_{i-1}$, according to three different positions of attaching, we call it α, β and γ from the top down.

Keywords: polyomino chain; hexagonal chain; the largest eigenvalue

目 录

中文摘要	I
英文摘要	II
第一章 引言	1
第二章 预备知识	4
第三章 四角链的一些结论	7
§ 3.1 最大特征根最小的极值四角链	7
§ 3.2 四角链关于最大特征根的其他结论	10
第四章 六角链的一些结论	14
§ 4.1 六角链关于最大特征根的已知结论	14
§ 4.2 最大特征根次大与次小的六角链的范围	15
参考文献	21
致 谢	24

Contents

Chinese abstract	I
English abstract	II
Chapter 1. Introduction	1
Chapter 2. Preliminary knowledge	4
Chapter 3. Some results of polyomino chains	7
§3.1 Extremal polyomino chains concerning largest eigenvalue.....	7
§3.2 Other results about largest eigenvalue of polyomino chains.....	10
Chapter 4. Some results of hexagonal chains	14
§4.1 Known results of hexagonal chains concerning largest eigenvalue	14
§4.2 The scopes of the hexagonal chains concerning second maximal largest eigenvalue and second minimum largest eigenvalue.....	15
References	21
Acknowledgement	24

第一章 引言

四角系统与六角系统都是平面图，有着很广泛的化学物理应用[13,21,22]。现已有许多关于它们的研究结果[6~11, 14~28]，涉及覆盖问题、非同构计数问题、匹配计数问题、独立点计数问题、能量问题以及谱问题等等。

四角系统(*polyominoes*)与六角系统(*hexagonals*)是组合数学中“细胞生长”(cell-growth)问题的两个研究对象。“细胞生长”问题与动物的发育很类似：从一个特定的正多边形(相当于一个细胞)开始，在平面上一步步向外“生长”，每生长一步即在其外围添加一个相同的细胞，且每两个相邻的细胞至少有一条边完全重合[4]。

下面从图论的角度分别定义*polyominoes*与*hexagonals*：

*Polyominoes*是一个有限简单的2-连通平面图，它满足：

- 1) 每个内部面是一个单位正方形；
- 2) 若两个正方形相邻，则它们仅有一条边完全重合。

*Hexagonals*也是一个有限简单的2-连通平面图，它满足：

- 1) 每个内部面是一个单位正六边形；
- 2) 若两个正六边形相邻，则它们仅有一条边完全重合。

为方便起见，我们将一个*polyominoes*（或*hexagonals*） G 所包含的正方形（或正六边形）的个数称为 G 的级数[5]。

四角链是一类特殊的*polyominoes*，它满足每个顶点至多属于三个正方形。我们用 Ψ_n 表示所有 n 级四角链的集合，而 Ψ_n 中的线性四角链与锯齿四角链分别用 L'_n 和 Z'_n 表示。六角链也是一类特殊的*hexagonals*，它满足每个顶点至多属于两个六边形且每个六边形至多与两个六边形相邻。我们用 Γ_n 表示所有 n 级六角链的集合，而 Γ_n 中的线性六角链、锯齿六角链和螺旋六角链分别用 L_n 、 Z_n 和 H_n 表示。

一直以来，四角链与六角链备受人们关注，现已有许多关于它们的研究结果，其中关于某些拓扑指标的极值链的研究结果有：

Gutman[6], Zhang[7]: 对于 $\forall n \geq 1$ 和 $\forall B_n \in \Gamma_n$ ，若 $B_n \neq L_n$ 且 $B_n \neq Z_n$ ，则有：

$$(a) \quad m(L_n) < m(B_n) < m(Z_n), \quad (b) \quad i(Z_n) < i(B_n) < i(L_n)$$

这里 $m(G)$ 和 $i(G)$ 表示图 G 的匹配的个数与独立集的个数。

Gutman[6], Zhang and Tian[8]: 对于 $\forall n \geq 1$ 和 $\forall B_n \in \Gamma_n$, 若 $B_n \neq L_n$ 且 $B_n \neq H_n$, 则有:

$$x_1(L_n) < x_1(B_n) < x_1(H_n)$$

这里 $x_1(G)$ 表示图 G 的最大特征根。

FJ.Zhang et al. [9]: 对于 $\forall n \geq 1$ 和 $\forall B_n \in \Gamma_n$, 若 $B_n \neq L_n$ 且 $B_n \neq Z_n$, 则有:

$$\pi(L_n) < \pi(B_n) < \pi(Z_n)$$

这里 $\pi(G)$ 表示图 G 的全 π -电子能量。

J. Rada and A. Tieno[12]: 对于 $\forall n \geq 1$ 和 $\forall B_n \in \Gamma_n$, 若 $B_n \neq L_n$, 则有:

$$E(B_n) > E(L_n)$$

这里 $E(G)$ 表示图 G 的能量。

LZ.Zhang and FJ.Zhang[10]: 对于 $\forall B_n \in \Gamma_n$ 和 $\forall k \geq 0$, 有:

$$m_k(L_n) \leq m_k(B_n) \leq m_k(Z_n), \quad i_k(L_n) \geq i_k(B_n) \geq i_k(Z_n)$$

且左边的等式对所有 k 成立当且仅当 $L_n = B_n$, 右边的等式对所有 k 成立当且仅当 $Z_n = B_n$ 。

这里 $m_k(G)$ 和 $i_k(G)$ 表示图 G 的 k -匹配数与 k -独立集数。

Yanqiu Zeng and Fujia Zhang [11]: 对于 $\forall B_n \in \Psi_n$ 和 $\forall k \geq 0$, 有:

$$m_k(L'_n) \geq m_k(B_n) \geq m_k(Z'_n), \quad i_k(L'_n) \leq i_k(B_n) \leq i_k(Z'_n),$$

且左边的等式对所有 k 成立当且仅当 $L'_n = B_n$, 右边的等式对所有 k 成立当且仅当 $Z'_n = B_n$ 。

本文主要研究四角链与六角链关于最大特征根的极值问题。图的最大特征根是指它的邻接谱半径, 是图的同构不变量, 是图论、特别是代数图论的一个基本研究课题, 已经形成相当成熟的理论, 详见Cvetkovic、Doob和Sachs的名著《Spectra of Graphs》[1]与Cvetkovic、Doob、Gutman和Torgasev的名著《Recent Results in the Theory

of Graph Spectra》[2]。图谱理论在很多学科特别是化学学科中有很好的应用[3]，如化学分子图的特征值与分子稳定性之间的关系。

在研究过程中，我们借鉴了gutman的平移-粘贴运算[6]以及LZ.Z和T.F的翻转-粘贴运算[8]，得到了最大特征根最小的极值四角链以及最大特征根次大与次小的极值六角链的范围：

定理1 对任意 $n \geq 1$ 和 $B_n \in \Psi_n$ ，如果 $B_n \neq L'_n$ ，则有：

$$x_1(B_n) > x_1(L'_n)$$

定理2： 定义 $D_n \in \Gamma_n - \{H_n\}$ 和 $B_n \in \Gamma_n - \{H_n, D_n\}$ ，若对 $\forall n \geq 4$ ，有 $x_1(B_n) < x_1(D_n)$ ，

$$\text{则 } D_n \in \Phi_n$$

定理3： 定义 $D_n \in \Gamma_n - \{L_n\}$ 和 $B_n \in \Gamma_n - \{L_n, D_n\}$ ，若对 $\forall n \geq 4$ ，有 $x_1(B_n) > x_1(D_n)$ ，

$$\text{则 } D_n \in \Omega_n$$

在定理2与定理3中：

$$\Phi_n = \{M_n = \beta k_2 \dots k_{n-1} \in \Gamma_n \mid \exists i (2 \leq i < n-1), \text{ s.t. } \forall j \leq i, k_j = \alpha \text{ 且 } \forall l > i, k_l = \gamma\}$$

$$\Omega_n = \{M_n = \beta k_2 \dots k_{n-1} \in \Gamma_n \mid \exists i (2 \leq i \leq n-1), \text{ s.t. } k_i = \alpha (\text{或 } \gamma) \text{ 且 } \forall j \neq i, k_j = \beta\}$$

其中 k_i 指将第 $i+1$ 个六边形粘贴到 $D_i = \beta k_2 \dots k_{i-1}$ 的方法，按三种不同的粘贴位置，

从上到下依次记 k_i 为 α 、 β 和 γ ，

进一步地，当 $n = 4, 5, 6$ 时，我们分别对 Γ_n 内所有六角链的最大特征根进行比较，得到当 $n \leq 6$ 时的两个结论：

结论1 设一个六角链 $D_n = \beta k_2 \dots k_{n-1}$ ，若 $D_n \neq H_n$ ，且 $\forall n \geq 1$ 和 $B_n \in \Gamma_n - \{H_n, D_n\}$ ，

均有 $x_1(B_n) < x_1(D_n)$ ，则 $D_{n-1} = \beta k_2 \dots k_{n-2} = H_{n-1}$ 且 $k_{n-1} \neq \beta$ 。

结论2 设一个六角链 $D_n = \beta k_2 \dots k_{n-1}$ ，若 $D_n \neq L_n$ ，且 $\forall n \geq 1$ 和 $B_n \in \Gamma_n - \{L_n, D_n\}$ ，

均有 $x_1(B_n) > x_1(D_n)$ ，则 $D_{n-1} = \beta k_2 \dots k_{n-2} = L_{n-1}$ 。

这结果是否对一般的 n 都成立有待于进一步探讨。

第二章 预备知识

一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \theta(G))$ ，其中 $V(G)$ 是非空的顶点集， $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集，而 $\theta(G)$ 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对（不必相异）。图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 是一个 $|V(G)| \times |V(G)|$ 矩阵，且 $A(G) = [a_{ij}]$ ，其中 a_{ij} 是连接 v_i 与 v_j 的边的数目 $(v_i, v_j \in V(G))$ 。

设 G 是一个图，图 G 特征多项式 $\phi(G, x)$ 是指它的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征多项式，简记为 $\phi(G)$ ，其特征值用 $x_i = x_i(G)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ 表示。设 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n$ ，我们称 x_i 为图 G 的邻接谱，其中 x_1 为图 G 的邻接谱半径，也称为图 G 的最大特征根。

本文用 Ψ_n 表示所有 n 级四角链的集合， Γ_n 表示所有 n 级六角链的集合。

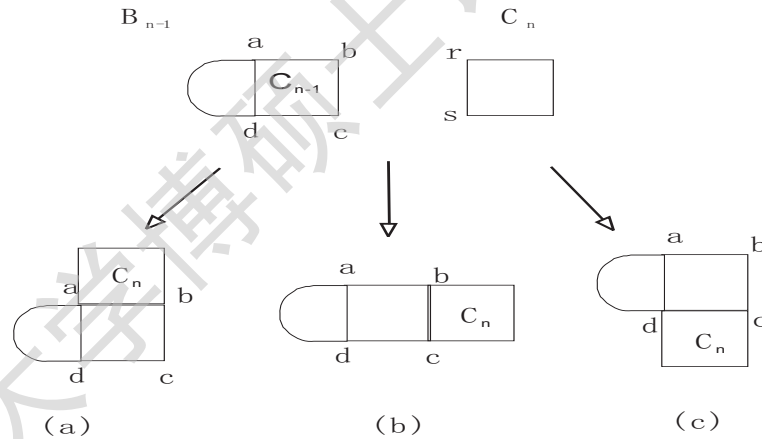


图2.1

若 $B_n \in \Psi_n$ ，将它的 n 个正方形分别标为 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 和 C_n ，其中 C_1 与 C_n 为两端的正方形，则它满足：1) 对于 $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$ ， C_i 和 C_{i+1} 恰有一条公共边，而其它的正方形之间没有公共边；2) n 个正方形的每个顶点至多含于三个正方形中。我们可记 B_n 为 $C_1 C_2 \dots C_n$ 。易见， Ψ_n 中的任意元素 B_n 都可以看做是由 Ψ_{n-1} 中的某个元素 B_{n-1} 粘贴一个正方形得到的。若 $B_{n-1} \in \Psi_n$ ， C_n 是一个正方形且 rs 是 C_n 的一条边，则将 C_n 粘贴到 B_{n-1} 可能有如图2.1所示的3种粘法[6]，分别称 (a)、(b)、(c) 所示的粘法为 α 、 β 和 γ 粘法。类似于文献[6]，记 $[B]_k$ 为由四角链 B 通过 k -型粘法粘贴

一个正方形 C 得到的四角链，这里 $k \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 。显然，每一个 B_n ($n \geq 2$) 可以写成 $\left[\dots \left[L_2 \right]_{k_2} \dots \right]_{k_{n-1}}$ ，其中 $k_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ，简记为 $B_n = \beta k_2 \dots k_{n-1}$ 。由于四角链中任意一个顶点同时最多含于三个正方形中，因而在粘法表示的四角链里，不能出现 $\alpha\alpha$ 或 $\gamma\gamma$ 。

若 $B_n \in \Gamma_n$ ，将它的 n 个正六边形分别标为 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 和 C_n ，其中 C_{n-1} 与 C_n 为两端的正六边形，则它满足：1) 对于 $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$ ， C_i 和 C_{i+1} 恰有一条公共边，而其它的正六边形之间没有公共边；2) n 个正六边形的每个顶点至多含于两个正六边形中。我们可记 B_n 为 $C_1 C_2 \dots C_n$ 。设 B 是一个六角链， C 是一个正六边形， rs 是 C 的一条边，与四角链相似，六角链中也有如图2.2所示 α 、 β 和 γ 粘法，且对于 $B_n \in \Gamma_n$ ，可用 $B_n = \beta k_2 \dots k_{n-1}$ 来表示，其中 $k_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 。

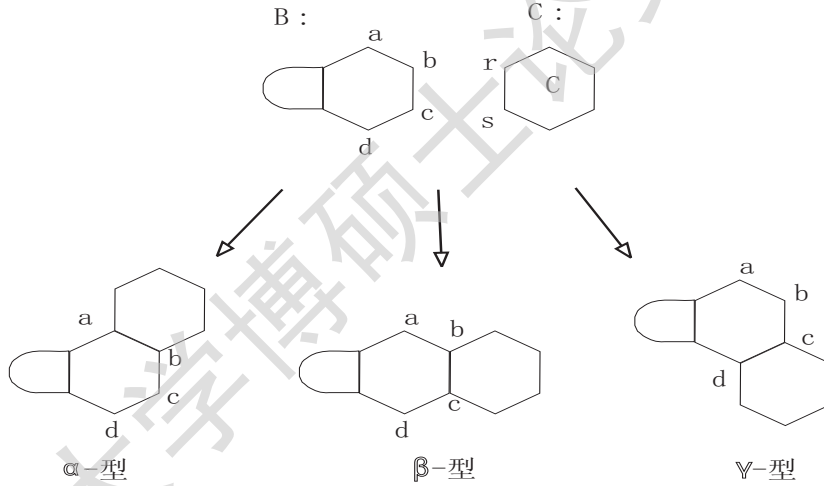


图2.2

下面给出翻转-粘贴运算[8]，令

$$\overline{k_i} = \begin{cases} \alpha & \text{当 } k_i = \gamma \text{ 时} \\ \beta & \text{当 } k_i = \beta \text{ 时} \\ \gamma & \text{当 } k_i = \alpha \text{ 时} \end{cases}$$

给定一个四（六）角链 $B_n = C_1 C_2 \dots C_n = \beta k_2 k_3 \dots k_{n-1}$ ，则 $B = C_i C_{i+1} \dots C_n$ 是 B_n 的四（六）角子链，我们可用 $B = k_i k_{i+1} \dots k_{n-1}$ 来表示（当 $i=1$ ， $k_1 = \beta$ ）。令

$$\overline{B} = \overline{k_i k_{i+1} \dots k_{n-1}}, \text{ 称 } \overline{B} \text{ 是 } B \text{ 的一个翻转, 特别地, } \overline{B_n} = \overline{\beta k_2 k_3 \dots k_{n-1}} = \beta \overline{k_2 k_3 \dots k_{n-1}}$$

是 B_n 的一个翻转[8]。

下面我们用粘法来做如下定义：

定义2.1 $B_n \in \Psi_n$ ，在 B_n 中，对于 $\forall i$ ， $2 \leq i \leq n-1$ ，若 $k_i = \beta$ ，称 B_n 为线性四角链，记为 L'_n ；若 $k_i \in \{\alpha, \gamma\}$ ，称 B_n 为锯齿四角链，记为 Z'_n 。

定义2.2 $B_n \in \Gamma_n$ ，在 B_n 中，对于 $\forall i$ ， $2 \leq i \leq n-1$ ，若 $k_i = \beta$ ，称 B_n 为线性六角链，记为 L_n ；若 $k_i \in \{\alpha, \gamma\}$ ，且对于 $\forall i$ ， $2 \leq i \leq n-2$ ，有 $k_i \neq k_{i+1}$ ，称 B_n 为锯齿六角链，记为 Z_n ；若 $k_i = \alpha$ （或 $k_i = \gamma$ ），称 B_n 为螺旋六角链，记为 H_n 。

现介绍在本文主要结论的证明过程中起到重要作用的一些已知结论：

引理2.1[3] 令 G 是由两个分支 G_1 、 G_2 组成的图，那么：

$$\phi(G) = \phi(G_1)\phi(G_2) \quad (1)$$

引理2.2[13] 设 $e = uv$ 是图 G 的一条边，那么：

$$a) \quad \phi(G) = \phi(G - uv) - \phi(G - u - v) - 2 \sum_j \phi(G - Z_j^G) \quad (2)$$

这里 Z_j^G 指图 G 中包含边 e 的圈，而和式取遍含边 e 的圈

$$b) \quad \phi(G) = x\phi(G - u) - \phi(G - u - v) - \sum_i \phi(G - u - w_i) - 2 \sum_j \phi(G - Z_j^G) \quad (3)$$

上式中， w_i 指异于点 v 的 u 的邻点，右边的第一个和式是对所有这样的点求和，第二个和式取遍含顶点 u 的圈。

引理2.3[8] 设 H 是图 G 的一个子图， uv 是 H 的一条边，且 v 不是 u 的唯一顶点，则当 $x = x_1(G)$ 时，有：

$$a) \quad \phi(H) > 0$$

$$b) \quad \phi(H) - x\phi(H - u) + \phi(H - u - v) < 0$$

引理2.4[6] 设 F 、 H 是两个图，定义 $\Delta(F, H, x) = \phi(F, x) - \phi(H, x)$ ，若当

$x = x_1(H)$ 时，有 $\Delta(F, H, x) < 0$ ，则

$$x_1(F) > x_1(H)$$

第三章 四角链的一些结论

四角链拥有很悠久的历史，其起源可以追溯到20世纪初，但它们是现代才被Golomb和Gardner在他主编的Scientific American 的“Mathematical Games”专栏中普及的，之后杂志Recreational Mathematics [4] 上便刊登了许多关于polyominoes的文章和问题。

四角链不仅可以做出好玩的游戏，还与数学上的几何学、组合学与图论等有着密切的联系。在验证一些图形是否能拼出时，我们经常用到归纳法、反证法、抽屉原理和对偶原理等数学技巧[14]。后来人们发现它也有很强的统计物理背景，可以作为气体分子在固体表面上吸附的模型，也可以作为二维的气体分子模型等。

迄今为止，人们已有许多关于四角链的研究结果[11, 14~20]，研究问题涉及匹配计数问题、独立点计数问题、能量问题等等。

本章对最大特征根最小的极值四角链进行研讨。

§ 3.1 最大特征根最小的极值四角链

§ 3.1.1 本节主要结论

定理 A 对任意 $n \geq 1$ 和 $\forall B_n \in \Psi_n$ ，如果 $B_n \neq L'_n$ ，则有：

$$x_1(B_n) > x_1(L'_n)$$

§ 3.1.2 本节主要结论的证明

本节中，设 $B_n = C_1 C_2 \dots C_n$ 是含有 n 个正方形的四角链，定义 $A = C_1 C_2 \dots C_{i-1}$ 和 $B = C_{i+2} C_{i+3} \dots C_n$ 。需要特别说明：在定理3.1中， A 是一线性四角链，即 $A = L'_{i-1}$ 。

定理3.1 定义两四角链 $B_n = \beta\beta\dots\beta\beta k_{i+1}\dots k_{n-1}$ 和 $B'_n = \beta\beta\dots\beta\alpha k_{i+1}\dots k_{n-1}$ ，有：

$$x_1(B'_n) > x_1(B_n)$$

证明：在 B'_n 中，由于 $k_i = \alpha$ ，可知 $k_{i+1} = \beta$ 或 $k_{i+1} = \gamma$

a) 若 $k_{i+1} = \beta$ ，则 $B_n = \beta\beta\dots\beta\beta k_{i+2}\dots k_{n-1}$ ， $B'_n = \beta\beta\dots\beta\alpha\beta k_{i+2}\dots k_{n-1}$ ，如图3.1

所示。根据引理2.4，只需证明当 $x = x_1(B_n)$ 时

$$\Delta(B'_n, B_n, x) = \varphi(B'_n) - \varphi(B_n) < 0 \quad \text{即可}$$

对 B_n 和 B'_n 运用 (2) 式得：

$$\varphi(B'_n) = \varphi(B'_n - ag) - \varphi(B'_n - a - g) - 2 \sum_j \varphi(B'_n - Z_j^{B'_n})$$

$$\varphi(B_n) = \varphi(B_n - af) - \varphi(B_n - a - f) - 2 \sum_j \varphi(B_n - Z_j^{B_n})$$

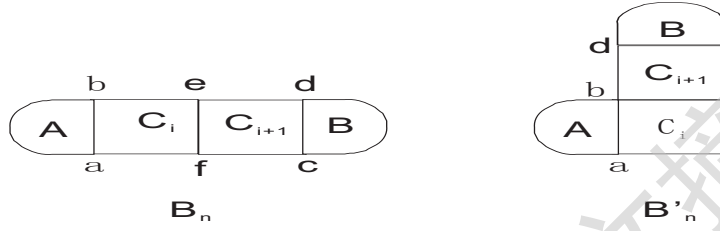


图3.1

类似于文献[6]的证明，可知对于所有的 j ， $\varphi(B_n - Z_j^{B_n}) \equiv \varphi(B'_n - Z_j^{B'_n})$

这样得到：

$$\Delta(B'_n, B_n, x) = \varphi(B'_n - ag) - \varphi(B'_n - a - g) - \varphi(B_n - af) + \varphi(B_n - a - f)$$

运用式(1)、(2)和(3)，可得：

$$\begin{aligned} \varphi(B'_n - ag) &= (x^2 - 1)\varphi(A)\varphi(B) - x\varphi(A)\varphi(B - c) - (x^2 - 1)\varphi(A - b)\varphi(B - d) \\ &\quad - x\varphi(A - b)\varphi(B) - x\varphi(A - b)\varphi(B - c - d) - 2x\varphi(A - b)\sum_j \varphi(B - Z_j^B) \\ \varphi(B'_n - a - g) &= x\varphi(A - a)\varphi(B) - \varphi(A - a)\varphi(B - c) - x\varphi(A - a - b)\varphi(B - d) \\ &\quad - \varphi(A - a - b)\varphi(B) - \varphi(A - a - b)\varphi(B - c - d) - 2\varphi(A - a - b)\sum_j \varphi(B - Z_j^B) \\ \varphi(B_n - af) &= (x^2 - 1)\varphi(A)\varphi(B) - x\varphi(A)\varphi(B - d) - x\varphi(A)\varphi(B - c) - \varphi(A)\varphi(B - c - d) \\ &\quad - x\varphi(A - b)\varphi(B) + \varphi(A - b)\varphi(B - c) - 2\varphi(A)\sum_j \varphi(B - Z_j^B) \\ \varphi(B_n - a - f) &= x\varphi(A - a)\varphi(B) - \varphi(A - a)\varphi(B - d) - \varphi(A - a - b)\varphi(B) \end{aligned}$$

上述各式中 Z_j^B 指图 B 中包含边 cd 的圈，而和式取遍 B 中含边 cd 的圈

由于 A 是一线性四角链，因而有 $\varphi(A - a) = \varphi(A - b)$

将上述各关系式代入 $\Delta(B'_n, B_n, x)$ ，化简可得：

$$\Delta(B'_n, B_n, x) = \{x\varphi(B-d) + \varphi(B-c-d) + 2\sum_j \varphi(B-Z_j^B)\}[\varphi(A) - x\varphi(A-b) + \varphi(A-a-b)]$$

根据引理2.3, 我们知道: 对于 $x = x_1(B_n)$, 有

$$\Delta(B'_n, B_n, x) = \varphi(B'_n) - \varphi(B_n) < 0$$

b) 若 $k_{i+1} = \gamma$, 则 $B_n = \beta \dots \beta \beta \gamma k_{i+2} \dots k_{n-1}$, $B'_n = \beta \dots \beta \alpha \gamma k_{i+2} \dots k_{n-1}$, 如图3.2所示

根据引理2.4, 只需证明当 $x = x_1(B_n)$ 时

$$\Delta(B'_n, B_n, x) = \varphi(B'_n) - \varphi(B_n) < 0 \quad \text{即可}$$

类似于a)的证明, 有

$$\Delta(B'_n, B_n, x) = \varphi(B'_n - ag) - \varphi(B'_n - a - g) - \varphi(B_n - ac) + \varphi(B_n - a - c)$$



图3.2

运用(1)、(2)和(3)式, 可得:

$$\begin{aligned} & \varphi(B'_n - ag) - \varphi(B'_n - a - g) \\ &= x^2 \varphi(A) \varphi(B) - x \varphi(A) \varphi(B-d) - x \varphi(A-b) \varphi(B) - (x^2 - 1) \varphi(A-b) \varphi(B-c) \\ & \quad - x \varphi(A-b) \varphi(B-c-d) - x \varphi(A) \varphi(B-c) + \varphi(A) \varphi(B-c-d) - x \varphi(A-a) \varphi(B) \\ & \quad + \varphi(A-a) \varphi(B-d) + \varphi(A-a-b) \varphi(B) + x \varphi(A-a-b) \varphi(B-c) \\ & \quad + \varphi(A-a-b) \varphi(B-c-d) + 2\{\varphi(A-a-b) - x \varphi(A-b)\} \sum_j \varphi(B-Z_j^B) \\ & \quad - \varphi(B_n - a - c) + \varphi(B_n - ac) \\ &= (x^2 - 1) \varphi(A) \varphi(B-c) - x \varphi(A-a) \varphi(B-c-d) - x \varphi(A-a-b) \varphi(B-c) - \varphi(A) \varphi(B-c-d) \\ & \quad + \varphi(A-a-b) \varphi(B-c-d) - (x^2 - 1) \varphi(A) \varphi(B) + x \varphi(A) \varphi(B-c) + x \varphi(A) \varphi(B-d) \\ & \quad + x \varphi(A-b) \varphi(B) - \varphi(A-b) \varphi(B-d) + 2 \varphi(A) \left\{ \varphi(B-c-d) + \sum_j \varphi(B-Z_j^B) \right\} \end{aligned}$$

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库